9/5/16

Το πρώτο πράγμα που κάναμε είναι να ελέγξαμε αν η συνολική παραγωγή = συνολική ζήτηση. Αν δεν ισχύει, π.χ $\Sigma a_i > \Sigma b_j$ τότε προσθέτω υποθετικό προορισμό B_{n+1} με $b_{n+1} = \Sigma a_i - \Sigma b_j$ με κόστος c_{in+1} (θα δίνεται απ' το πρόβλημα), ανάλογα αν $\Sigma a_i < \Sigma b_j$ προσθέτουμε εικονικό σταθμό παραγωγής A_{m+1} $\Sigma b_j - \Sigma a_i$ το τι παράγει με κόστος c_{m+1j}

- Το πρόβλημα της μεταφοράς έχει εφικτή λύση

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{S}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \frac{\Sigma b_j}{S} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \frac{\Sigma a_i}{S} = b_j$$

$x_{ij} \geq 0$, άρα υπάρχει εφικτή λύση και επιπλέον πληροφορούμαστε πως η εφικτή περιοχή δεν είναι κενή.

· Επιπλέον, το πρόβλημα της μεταφοράς έχει άριστη λύση. Αρκεί ν.δ.ο η εφικτή περιοχή είναι φραγμένη.

$0 \le x_{ij} \le a_i \qquad 0 \le x_{ij} \le b_j$

$x_{ij} \le \min\{a_i, b_j\} = M_{ij}$ άρα εφικτή περιοχή είναι φραγμένη.

· Η άριστη λύση του προβλήματος μεταφοράς δεν αλλάζει αν από κάθε κόστος c_{ij} να αναφέρονται σε κάποιο σταθμό παραγωγής A_k (ή σε κάποιο σταθμό προορισμού B_j) αφαιρεθεί η ίδια ποσότητα c. Το νέο πρόβλημα μεταφοράς έχει ελάχιστο κόστος $R' = R - ca_k$ ($R' = R - cb_j$) όπου R είναι το αρχικό ελάχιστο κόστος.

$$c'_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & i \neq k \\ c_{ij} - c & i = k \end{cases}$$ οπότε θα έχουμε:

$$R' = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij} x_{ij} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} (c_{kj} - c) x_{kj} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} - c \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = R - ca_k$$

· (ΒΔ γωνία)

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	200 (4)	0 (6)	0 (8)	0 (12)	~~200~~ 0
A_2	100 (2)	160 (5)	0 (7)	0 (4)	~~260~~ ~~160~~ 0
A_3	0 (6)	80 (9)	160 (13)	100 (8)	340
	~~300~~ ~~100~~ 0	~~240~~ 80	160	100	800

Η παραπάνω είναι μια εφικτή λύση όχι άριστη.
από όπου μπορούμε να βρούμε το κόστος $4\times200+100\times2+\dots+100\times8$
x_{ij} ποσότητα που θα μεταφερθεί από $i \to j$

$$\min\ 4x_{11}+6x_{12}+\dots+8x_{34}$$

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=200$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=260$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=340$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=300$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=240$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=160$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=100$$
$$x_{ij}\geq 0$$

Η μοντελοποίηση του προβλήματος σε π.γ.π.

(Μέθοδος ελάχιστου στοιχείου)

40 (4)	160 (6)	0 (8)	0 (12)	~~200~~ ~~160~~ 0
260 (2)	0 (5)	0 (7)	0 (4)	~~260~~ 0
0 (6)	80 (9)	160 (13)	100 (8)	340
~~300~~	~~240~~	160	100	800
~~40~~	80			
0				

Οι δύο μεθοδολογίες μας έδωσαν διαφορετικές λύσεις.

2 3
2 3 5
2 1 1
2 1 1 4

(Vogel)

2 2 2 2	0 (4)	40 (6)	160 (8)	0 (12)	~~200~~ 40
3 3 2	160 (2)	0 (5)	0 (7)	100 (4)	~~260~~ 100
3 2 3 2	140 (6)	200 (9)	0 (13)	0 (8)	340
	~~300~~	~~240~~	~~160~~	100	800
	140				

*(από όλα παίρνω το μεγαλύτερο και θα στείλω στο μικρότερο)

$$
\begin{array}{l|llll}
u_1 & x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1n} & & & = a_1 \\
u_2 & & x_{21}+x_{22}+\dots+x_{2n} & & = a_2 \\
 & & \ddots & & \\
u_m & & & x_{m1}+x_{m2}+\dots+x_{mn} & = a_m \\
v_1 & x_{11} & +x_{21} & +x_{m1} & = b_1 \\
v_2 & x_{12} & +x_{22} & +x_{m2} & = b_2 \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
v_n & x_{1n} & +x_{2n} & +x_{mn} & = b_m
\end{array}
$$

φτιάχνουμε το δυϊκό

$$
(\Delta)\quad \begin{array}{l} \max b'\underset{\sim}{w} \\ A'\underset{\sim}{w} \le \underline{c} \\ w_i \in \mathbb{R} \end{array}
\qquad \underset{\sim}{w} = \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}
$$

άρα $\max \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum b_j v_j$

$$
(\Delta) \qquad u_i + v_j \le c_{ij} \quad i=1,\dots,m \quad j=1,\dots,n
$$

• Έστω $(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v})'$ $\underline{u} = (u_1,\dots,u_m)'$ $\underline{v} = (v_1,\dots,v_n)'$ μια εφικτή λύση του (Δ), $\theta \in \mathbb{R}$ θέτουμε $u_i' = u_i - \theta$ $i=1,\dots,m$

$v_j' = v_j + \theta$ $j=1,\dots,n$

τότε $(u_1', u_2', \dots, u_m', v_1', \dots, v_n')'$ είναι επίσης εφικτή λύση να δίνει την ίδια τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση.

$$u_i' + v_j' = u_i - \theta + v_j + \theta = u_i + v_j \le c_{ij}$$

$$R' = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i' + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = \sum_{i=1}^{m} a_i (u_i - \theta) + \sum_{j=1}^{n} b_j (v_j + \theta) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j + \vartheta \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \right) = R$$

• Έστω $\{ \hat{x}_{ij} \;\; i=1,\dots,m,\; j=1,\dots,n \}$ μια εφικτή λύση του προβλήματος μεταφοράς. Η $\{\hat{x}_{ij}\}$ είναι άριστη λύση αν-ν υπάρχουν $u_i \;\; i=1,\dots,m$ $v_j \;\; j=1,\dots,n$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} u_i + v_j = c_{ij} & \text{αν } \hat{x}_{ij} > 0 \\ u_i + v_j \le c_{ij} & \text{αν } \hat{x}_{ij} = 0 \end{cases}$$

($\Rightarrow$) Το ξέραμε από θεώρημα συμπληρωματικής χαλαρότητας

($\Leftarrow$) Αν $\{\hat{x}_{ij}\}$ είναι εφικτή και ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις θα δείξουμε ότι $\{\hat{x}_{ij}\}$ άριστη.

ικανοποιεί τους περιορισμούς

$$\sum_{j=1} \hat{x}_{ij} = a_i \qquad \sum_{i=1}^{m} \hat{x}_{ij} = b_j$$

$i=1,\dots,m \qquad j=1,\dots,n$

$$\hat{R} = \sum\sum c_{ij} \hat{x}_{ij} = \sum\sum (u_i + v_j) \hat{x}_{ij} = \sum\sum u_i \hat{x}_{ij} + \sum\sum v_j \hat{x}_{ij} =$$
$$\sum u_i a_i + \sum b_j v_j$$

Έστω τώρα x_{ij} άλλη εφικτή λύση.

$$R' = \sum\sum c_{ij} x_{ij} \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{από το δυϊκό})}}{\geq} \sum (u_i + v_j) x_{ij}' = \sum u_i \sum x_{ij}' + \sum v_j \sum x_{ij}' =$$

$$= \sum u_i a_i + \sum v_j b_j = \hat{R}$$

Άριστη λύση, εκείνη που ικανοποιεί τις παραπάνω σχέσεις

(Η μέθοδος του δυναμικού)

	A_1	A_2	A_3	A_4	
F_1	5 (19)	0 (30)	0 (50)	2 (10)	7
F_2	0 (70)	0 (30)	7 (40)	2 (60)	9
F_3	0 (40)	8 (8)	0 (70)	10 (20)	18
	5	8	7	14	34

(Λύθηκε με Vogel)

$u_i + v_j = c_{ij}$

θέλω $u_1 + v_1 = 19$

$u_1 + v_4 = 10$ θεωρώ αυθαίρετα $u_4 = 0$, έτσι

$u_2 + v_3 = 40$ $v_1 = 9$, $u_1 = 10$, $v_3 = -20$, $u_2 = 60$

$u_2 + v_4 = 60$ $v_2 = -12$, $v_4 = 0$, $u_3 = 20$

$u_3 + v_2 = 8$

$u_3 + v_4 = 20$

u \ v	9	-12	-20	0
10	5 (19)	0 (30)	0 (50)	2 (10)
60	0 (70)	0 + (30)	7 (40)	2 − (60)
20	0 (40)	8 − (8)	0 (70)	10 + (20)

(ξεκινώ από τετράγωνο με το περισσότερο θετικό δ_{ij})

$\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$

για να σταματήσει ο αλγόριθμος πρέπει όλα τα $\delta_{ij} \le 0$

ορίζω $\theta_0 = \min\{x_{ij}$ από τα τετράγωνα με $-\} = \min\{2,8\} = 2$

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \theta_0 & \text{για τετράγωνα με } + \\ x_{ij} - \theta_0 & \text{για τετράγωνα με } - \\ x_{ij} & \text{για τα υπόλοιπα} \end{cases}$$

u \ v	29	8	18	20
-10	5 (19)	(-34) 0 (30)	(-45) 0 (50)	2 (10)
-22	0 (70)	2 (30)	7 (40)	0 (60)
0	(-11) 0 (40)	6 (8)	(-32) 0 (70)	12 (20)

$5\times19 + 2\times10 + 2\times30 + 7\times40 + 6\times8 + 12\times2$

η λύση του προβλήματος

	B_1	B_2	B_3	B_4		B_5	
• A_1	0 (3)	0 (6)	0 (2)	15 (1)	20	5 (2)	20
A_2	0 (6)	25 (3)	15 (4)	0 (7)	40	0 (4)	40
A_3	10 (6)	0 (5)	20 (8)	0 (40)	50	20 (5)	50
	10	25	35	15		25	110

$\Sigma a_i = 110 > 85 = \Sigma b_j$ άρα θα έχουμε ένα B_5

$u \backslash v$	3	4	5	1	2
Έχει επιλεχθεί $u_1=0$ 0	(0) 0 3	(−3) 0 6	(3) 0 + 2	15 1	5 − 2
−1	(−4) 0 6	25 3	15 4	(−7) 0 7	(−3) 0 4
3	10 6	(2) 0 5	20 − 8	(−5) 0 9	20 + 5

και κάνω την ίδια διαδικασία όπως πριν

(Δηλια)

	B_1	B_2	B_3	
• A_1	23	24	23	5
A_2	23	25	24	8
A_3	24	25	23	7
A_4	25	23	25	6
	8	9	10	

$\Sigma a_i = 26 < 27 = \Sigma b_j$ άρα θα έχω A_5, με A_5 5 | 15 | 20

Πάντα ελέγχω τα αθροίσματα